

Parte 1

Probabilidade.odt

As probabilidades são utilizadas para exprimir a chance de ocorrência de um evento.

**Experiências aleatórias:** são experiências que repetidas sob as mesmas condições produzem geralmente resultados diferentes. Exm. Lançamento de um dado, moeda etc.

**Espaço amostral(S):** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exm. a) Dado  $S=\{1,2,3,4,5,6\}$  b) moeda  $S=\{K,c\}$

**Evento:** é qualquer subconjunto de S.

**Evento certo:** é quando um evento coincide com o espaço amostral.

Exm: Qual a probabilidade de sair um número entre 1 e 6 no lançamento de um dado? R: 1 ou 100%

**Evento impossível:** é quando o evento é vazio.

Exm: Qual a probabilidade de sair o número 7 no lançamento de um dado?

Exm. No lançamento de uma moeda se dá cara não dá coroa e vice-versa.

**Eventos mutuamente excludentes:** quando não têm elemento comum, ou se não podem ocorrer simultaneamente.

Exm. No lançamento de um dado a saída de um número par ou ímpar é um exemplo de eventos mutuamente excludentes.

**Eventos coletivamente exaustivos:** se nenhum outro resultado é possível para o experimento em causa.

Exm: No lançamento de um dado os eventos a seguir são coletivamente exaustivos. E1; saída dos números 1 e 2, E2; saída dos números 3 e 4, E3; saída dos números 5 e 6.

**Probabilidade (Método clássico)**

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados associados ao evento A}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

A chance a favor de um evento é igual à razão do número de resultados favoráveis para o número de resultados não-favoráveis.

**Probabilidade (Frequência relativa)**

$$P(A) = \frac{\text{número de ocorrências de A}}{\text{número total de provas ou observações}}$$

**PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE**

**Evento complementar(A').** Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de S. Chama-se “evento complementar de A”, que se indica por A', o evento que satisfaz as seguintes condições:  $A \cup A' = S$  e  $A \cap A' = \emptyset$ .

PROPRIEDADES DAS PROBABILIDADES

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(S) = 1$
- Para todo evento A,  $0,00 \leq P(A) \leq 1,00$
- $P(A') = 1 - P(A)$  probabilidade complementar

Exm. Uma urna contém apenas bolas vermelhas, azuis, brancas e pretas. Retira-se ao acaso uma bola da urna. A probabilidade de sair uma bola vermelha é 5/17. Qual é a probabilidade de sair uma bola que não seja vermelha?

Solução. O evento não sair bola vermelha é complementar ao não sair bola vermelha.  
 $P(A')=1-5/7=12/17$

**ADIÇÃO DE PROBABILIDADES**

**Teorema da soma.** Seja E um espaço amostral finito e não-vazio. Para quaisquer eventos A e B de E, tem-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exm. Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de se obter uma bola com um número múltiplo de 2 ou de 3?

Solução.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 10/20 + 6/20 - 3/20 = 13/20$

**Teorema do eventos mutuamente excludentes.** Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente

$$(A \cap B = \emptyset).$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exm. Uma urna contém cinco bolas vermelhas, três bolas azuis e quatro bolas brancas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha ou uma bola azul?

Solução. Eventos mutuamente exclusivos.  $(A \cap B = \emptyset)$   
 $P(A \cup B) = 5/12 + 3/12 = 2/3$

**Probabilidade condicional.** def. Dados dois eventos A e B, com  $P(B) \neq 0$ , a probabilidade da ocorrência de A considerando-se que já ocorreu o evento “B”:

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Exm. Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um “ás vermelho” sabendo que ela é de “copas”?

Sol. evento A: {ás de copas, ás de ouro}; evento B: {cartas de copas} =>  $n(B)=13$ ;  $A \cap B = \{\text{ás de copas}\} \Rightarrow n(A \cap B)=1$   
 $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = (1/52) / (13/52) = 1/13$

**Eventos independentes.** Seja um espaço amostral S, finito e não-vazio. Sejam A e B eventos de S. Dizemos que A e B são eventos independentes se, e somente se:

$$P(B|A) = P(B) \text{ ou } P(A|B) = P(A).$$

Obs. Dois ou mais eventos dizem-se independentes se a ocorrência ou a não-ocorrência de um não influencia a ocorrência do(s) outro(s).

Exm. Quando lançamos uma moeda duas ou mais vezes seguidas o resultado dos lançamentos posteriores não são afetados pelos anteriores.

**Teorema da multiplicação(eventos independentes).** “A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos independentes  $(P(A \cap B))$  é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro”.

Exm: Qual a probabilidade de se obter cara ao se jogar duas vezes uma moeda- isto é cara na primeira e cara na segunda jogada?

Solução.  $1/2 \cdot 1/2 = 1/4 = 0,25$

**Significado do “ou” e “e”.** Em probabilidade a palavra “ou” significa adição e “e” multiplicação. Exm1. Qual a probabilidade de sair ímpar num dado? Solução. As faces podem ser 1 ou 3 ou 5. Exm2. Qual a probabilidade de sair uma bola branca e uma vermelha numa urna contendo 4 bolas brancas e 6 vermelhas?

Obs. Muitos, talvez a maioria, das aplicações da probabilidade envolvem frases do tipo: ao menos, no máximo, menos que e mais que. Nestes casos a solução envolve a soma de dois ou mais casos.

Parte 1

Probabilidade.odt

EXERCÍCIOS

1) Através de estudos genéticos, uma gestante descobriu que a probabilidade de seu filho nascer com olhos escuros é o triplo da probabilidade de nascer com olhos claros, independentemente de ser menino ou menina. Qual é a probabilidade de a gestante ter uma criança de olhos escuros?

R: 3/4

2) Um semáforo de uma avenida está regulado de modo que a probabilidade de encontrá-lo indicando verde é o dobro da probabilidade de encontrá-lo indicando vermelho, que, por sua vez, é o sêxtuplo da probabilidade de encontrá-lo amarelo. Supondo que o semáforo esteja funcionando normalmente, calcular as probabilidades de encontrá-lo:

a) verde; b) vermelho; c) amarelo.

R: a) 12/19 b) 6/19 c) 1/19

3) Uma moeda é lançada duas vezes seguidas. Qual é a probabilidade de se obter cara em pelo menos um dos lançamentos?

R: 3/4

4) Uma urna contém 5 bolas verdes, 3 brancas e 4 pretas, indistinguíveis pelo tato. Sorteando-se uma das bolas ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser:

a) branca? b) preta?

R: a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{3}$

5) De um baralho de 52 cartas são retiradas 3 cartas ao acaso, formando-se um jogo. Qual é a probabilidade de esse jogo ter:

a) 3 figuras? b) 3 cartas de espadas? c) 1 ás e duas figuras?

R: a) 11/1105 b) 11/850 c) 66/5525

6) Retirando-se 2 cartas ao acaso de um baralho comum, qual é a probabilidade de se obterem 2 figuras ou 2 cartas de espadas?

R: 47/442

7) Numa gaveta há 8 meias pretas, 6 azuis e 4 vermelhas, todas misturadas. No escuro, uma pessoa abre a gaveta e apanha duas meias ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela tenha formado um par de meias da mesma cor?

R: 49/153

8) De uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20 serão retiradas 3 bolas simultaneamente. Qual é a probabilidade de que não sejam retiradas 3 bolas com números pares?

R: 17/19

9) O serviço meteorológico informa que, para o final de semana, a probabilidade de chover é de 60%, a de fazer frio é de 70% e a de chover e fazer frio é de 50%. Calcular a probabilidade de que, no final de semana,

a) chova ou faça frio; b) não chova e não faça frio.

R: a) 80% b) 20%

10) De uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20, retira-se uma bola ao acaso. Qual é a probabilidade de ocorrer:

a) um número par? b) um número par, dado que ocorreu um número maior que 10?

R: a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{2}$

11) Lançando-se uma moeda e um dado, qual é a probabilidade de ocorrer cara na moeda e mais de 4 pontos no dado?

R: 1/6

12) Uma urna contém 5 bolas amarelas e 4 brancas. Retirando-se duas bolas ao acaso, qual é a probabilidade de que ambas sejam da mesma cor, se a 1a. bola retirada:

a) for repostada? b) não for repostada?

R: a) 41/81 b) 4/9

13) Uma urna contém 4 bolas verdes e 5 brancas e uma segunda urna, idêntica à primeira, contém 6 bolas verdes e 3 brancas. Escolhe-se uma urna ao acaso e retira-se uma bola. Qual é a probabilidade de que a bola retirada seja verde?

R: 5/9

14) Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas, 2 peças são retiradas uma após a outra sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam boas?

Solução: Diagrama em árvore:  $(\frac{2}{3}) \cdot (\frac{7}{11}) = \frac{14}{33}$

15) Uma fábrica tem três máquinas A, B, C que respondem, respectivamente, por 40%, 35%, 25% de sua produção. A proporção de peças defeituosas na máquina A é de 2%; essa proporção é de 1% para a máquina B e de 3% para a máquina C. Toma-se uma peça ao acaso. É defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina B?

R: 18,4 %

Parte 2

EXERCÍCIOS Parte 2

Probabilidade.odt

**Experimentos Binomiais.** Há experimentos que apresentam dois possíveis resultados. Por exemplo, do lançamento de uma moeda só pode resultar cara ou coroa; um exame laboratorial para detecção de alguma doença pode resultar positivo ou negativo; se um jovem “chuta” num teste de vestibular, pode acertar ou errar. Imagine um experimento dessa natureza repetido um certo número (finito) de vezes, em condições idênticas, levando-se em conta que essas repetições constituam eventos independentes: está caracterizado um experimento binomial.

**Distribuição Binomial.** Outra definição.

- i) Uma experiência é realizada n vezes independentemente.
- ii) Em cada uma das n vezes, um evento A tem probabilidade p(A) de ocorrer.
- iii) A probabilidade de não ocorrer A é p(A')=1-p(A)
- iv) A probabilidade de A ocorrer em k das n vezes é dada por:

$$P = C_{n,k} [P(A)]^k.[P(A')]^{n-k}$$

**Triângulo de Pascal.** Coeficiente binomiais (p+q)<sup>n</sup>

n => coeficientes

0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

1) (Distribuição binomial) Por meio de estudos genéticos, um casal descobre que a probabilidade de que eles venham a ter um filho de olhos azuis é igual a  $\frac{1}{8}$ . Se o casal pretende ter 6 filhos, qual é a probabilidade de que:

- a) exatamente 2 tenham olhos azuis?
- b) no máximo dois tenham olhos azuis?

R: a) 1215/4096 b) 1701/2048

2) Doze por cento dos que reservam lugar num vôo sistematicamente faltam ao embarque. O avião comporta 15 passageiros. Stevenson p.108 exr.3

- a) Determine a probabilidade de que todos os 15 que reservaram lugar compareçam ao embarque.
- Se houve 16 pedidos de reserva, determine a probabilidade:
- b) de uma pessoa ficar de fora.
- c) de nenhuma ficar de fora.
- d) de mais de uma ficar de fora.

R: a) 0,1470 b) (1) 0,1296 c) (2) 0,8706 d) impossível

3) Suponha que um promotor esteja atuando em dois casos, um julgamento por furto e outro por rapto. Com base em sua experiência anterior, ele acha que tem uma chance de 0,80 de obter condenação no caso de furto e uma chance de 0,70 no caso de rapto. Qual a probabilidade de obter condenação em ambos os casos? R: A probabilidade de ele obter condenação em ambos os casos é (0,80).(0,70)=0,56